

## UM PROJECTO CENTRADO NO SENTIDO DO NÚMERO

Joana Brocardo, ESE de Setúbal; Lurdes Serrazina, ESE de Lisboa; Isabel Rocha; ESE de Leiria, Fátima Mendes, ESE de Setúbal, Hugo Menino, ESE de Leiria e Elvira Ferreira, ESE de Torres Novas  
[joana.brocardo@dgidc.min-edu.pt](mailto:joana.brocardo@dgidc.min-edu.pt)

### Resumo

*Nesta comunicação faremos uma apresentação global do projecto “Desenvolvendo o sentido do número: Perspectivas e exigências curriculares”. Para além da fundamentação teórica e da metodologia são apresentados resumidamente dois dos estudos de caso realizados procurando ilustrar os dados obtidos com a realização do projecto focando três aspectos principais: a organização das aprendizagens a partir das produções dos alunos, as características das tarefas e o papel do professor.*

### Abstract

*In this communication we will present the Project “Number sense development: curricular demands and perspectives”. Besides providing the theoretical basis and the methodology followed in this Project, we present a summary of two case studies. The data focus three main aspects: students’ learning organizations based on their productions, tasks’ characteristics, and the teacher’s role.*

O projecto *Desenvolvendo o sentido do número: Perspectivas e exigências curriculares* (DSN) iniciou-se em Janeiro de 2005, teve a duração de três anos e caracterizou-se por incluir de modo articulado o desenvolvimento curricular e a investigação educacional.

Ao nível do desenvolvimento curricular foram construídas, experimentadas e avaliadas tarefas isoladas e cadeias de tarefas ou seja, grupos de 3 ou 4 tarefas concebidas de modo articulado e que reflectem o modo como se pensou a trajectória de aprendizagem para temas e relações incluídas no sentido do número, em crianças dos 5 aos 12 anos.

Ao nível da investigação educacional foram identificadas e estudadas diversas questões que dizem respeito a três problemáticas (i) a aprendizagem numa perspectiva de sentido do número, (ii) as práticas profissionais que favorecem o sentido do número e (iii) características do currículo que favorecem o desenvolvimento do sentido do número.

A equipa foi constituída por professores e investigadores de três escolas superiores de educação (ESE) ligados à Didáctica da Matemática e por professores das turmas onde foram experimentadas as tarefas – educadores de infância e professores do 1.º e 2.º ciclo do ensino básico. Os diferentes membros da equipa trabalharam colaborativamente em todas as fases da pesquisa. Para a elaboração das tarefas e cadeias de tarefas organizaram-se sub-equipas constituídas por investigadores (pertencentes a duas ESE diferentes) e pelo professor da turma onde as tarefas ou cadeias de tarefas foram experimentadas, sendo estas, antes da experimentação na turma, discutidas na equipa do projecto. A sub-equipa foi também responsável por apresentar uma análise inicial da experimentação das tarefas ou cadeias de tarefas.

Neste momento estamos a terminar as publicações preparadas no âmbito do projecto, a analisar o trabalho realizado e a perspectivar a sua continuação. Este texto reflecte a fase de reflexão e análise de perspectivas de continuação em que nos encontramos. Começamos por analisar as principais características do projecto e por referir

brevemente dois dos estudos de caso realizados. Na secção final incluímos os principais resultados do projecto e a sua articulação com os aspectos que consideramos deverem ser aprofundados no estudo do tema Sentido do Número.

### **Fundamentação teórica. Aspectos centrais**

A concepção e desenrolar do projecto fundamentou-se numa revisão da literatura focada no sentido do número que apresentaremos de modo resumido e organizada em torno de três aspectos centrais: clarificação do entendimento de sentido do número, sentido do número e currículo e tarefas para os alunos e sua exploração por parte do professor.

A revisão da literatura que fizemos com o objectivo de clarificar o modo de entender sentido do número, realçou fundamentalmente duas características. Uma primeira diz respeito ao seu desenvolvimento progressivo. Não se trata de algo que se aprenda de uma vez por todas numa dada fase do percurso escolar mas sim de uma competência que deve ser desenvolvida ao longo de toda a escolaridade (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999; NCTM, 2000). A segunda característica prende-se com o seu carácter global. Alguns autores consideram que o sentido do número é uma intuição global sobre os números e operações. Outros preferem usar o termo compreensão global. No entanto, existe um entendimento geral de que o sentido do número inclui conhecimentos sobre os números e as operações e sobre o seu uso flexível na realização de julgamentos matemáticos e na resolução de problemas. Por considerarmos que a definição proposta por McIntosh, Reys e Reys, (1992) reúne de uma forma clara todos os aspectos essenciais, a equipa do projecto usou-a como referencial do nosso entendimento de sentido do número. Assim, seguindo a definição destes autores, consideramos que sentido do número inclui:

- 1.O conhecimento e destreza com os números que engloba o sentido da regularidade dos números, as múltiplas representações dos números, o sentido da grandeza relativa e absoluta dos números e, finalmente, o uso de sistemas de referência que permitem avaliar uma resposta ou arredondar um número para facilitar o cálculo.
2. O conhecimento e destreza com as operações que engloba compreensão do efeito das operações, das propriedades e a das relações entre as operações.
3. A aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo que engloba a compreensão para relacionar o contexto e os cálculos, a consciencialização da existência de múltiplas estratégias, a apetência para usar representações eficazes e a sensibilidade para rever os dados e o resultado.

Inserido no aprofundamento teórico deste aspecto estudámos numa perspectiva de desenvolvimento do sentido do número as principais temáticas dos números e das operações: aprendizagens iniciais, números inteiros, decimais e fraccionários; adição e subtracção; multiplicação e divisão.

Relativamente ao sentido do número no currículo (em Brocardo *et al.*, 2006, apresentamos uma síntese dos aspectos discutidos neste tema) analisámos as grandes tendências de desenvolvimento curricular discutindo posições relativas ao peso a dar às técnicas de cálculo e à sua integração num trabalho que foca o desenvolvimento de capacidades como as de resolver problemas ou de criticar ideias e argumentar. Reflectimos ainda sobre questões colocadas pelo uso das novas tecnologias e sobre as implicações de vários estudos empíricos realizados em Portugal focados no estudo dos números e das operações.

Finalmente, o aprofundamento teórico em torno das tarefas propostas aos alunos e do papel dos professores na sua exploração na sala de aula, levou-nos a analisar alguns aspectos discutidos no âmbito da matemática realista. Freudenthal (1968) vê a matemática como uma actividade humana: “O que as pessoas têm de aprender, não é a matemática enquanto sistema fechado, mas antes uma actividade, o processo de matematizar a realidade e ainda, se possível, matematizar a matemática”. Neste sentido procurámos conceber tarefas cujo contexto permitisse às crianças utilizar os conhecimentos de que dispunham para matematizar a situação. No sentido de concretizarmos estas ideias considerámos as três componentes indicadas por Fosnot e Dolk, (2001) para que as situações possam vir a ser matematizadas pelos alunos: (1) o potencial para modelar a situação está incorporado, (2) a situação permite às crianças perceber o que estão a fazer e (3) a situação incita os alunos a colocar questões, e a identificar padrões. Quanto ao papel do professor, de entre o aprofundamento teórico realizado, destacamos um aspecto que salienta Gravemeijer (2005) e que considerámos basilar para a preparação das aulas em que foram testadas tarefas desenvolvidas no âmbito do projecto e para as indicações aos professores sobre a exploração dos materiais desenvolvidos: o professor deve conseguir passar do papel de fornecer indicações e explicações para o papel de ajudar os alunos a (re)inventar a Matemática o que os coloca na “difícil tarefa de construir com base no input e nas ideias dos alunos e ao mesmo tempo trabalhar na direcção de objectivos convencionais fixos” (pp. 99).

## **Metodologia**

Ao nível da vertente de desenvolvimento curricular, a metodologia usada seguiu de perto o modelo de Simon (1995) que representamos esquematicamente na figura 1. Ao desenvolver as tarefas que iriam ser testadas em sala de aula, a equipa tomou decisões tendo em conta os conhecimentos sobre os temas a abordar, sobre a aprendizagem e sobre os alunos, construindo aquilo a que Simon chama uma trajectória hipotética de aprendizagem – um caminho de aprendizagem marcado por um certo número de tarefas que o professor concebe ao pensar nas ideias e processos matemáticos que quer que os alunos desenvolvam. Esta trajectória de aprendizagem é hipotética porque é concebida como uma experiência de ensino e porque não é possível prever se ela será, de facto, uma via real de aprendizagem. No entanto, ela reflecte o que se prevê que aconteça antecipando as abordagens, discussões e resoluções que podem ser proporcionadas aos alunos.

Na experimentação realizada, durante as interacções com os alunos pode-se avaliar em que medida os alunos reagem de acordo com o previsto e evoluem na direcção pretendida. Ao analisar os processos e resultados destas interacções e ao reconstruir o processo de aprendizagem constrói-se uma nova trajectória de aprendizagem, ajustada a partir da experimentação.

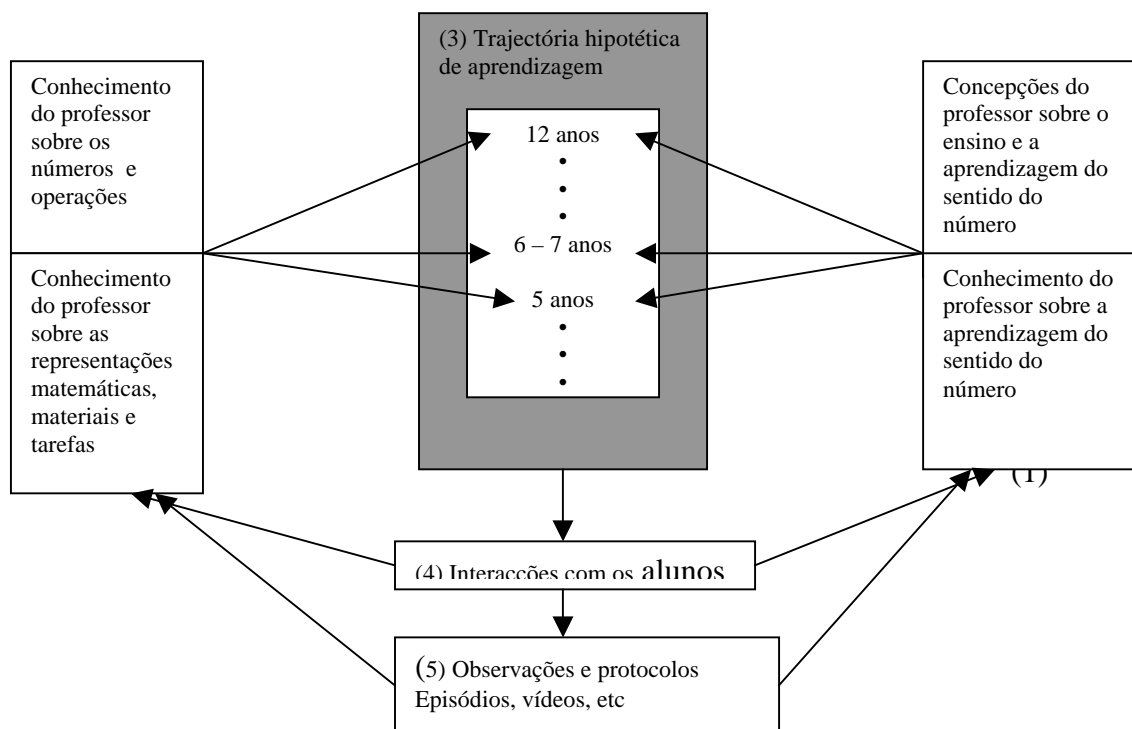


Figura 1 - Ciclo de ensino (adaptado de Simon, 1995)

A vertente de investigação desenvolveu-se no contexto deste ciclo de planificação, ensino e melhoramento e organizou-se em estudos de caso.

Cada estudo de caso consistiu na implementação por uma das sub-equipas do projecto de uma cadeia de tarefas – conjunto de três ou quatro tarefas - numa turma de alunos. Foram desenvolvidas cadeias de tarefas para os diferentes conceitos relativos ao sentido do número.

Para cada cadeia de tarefas foram identificados à partida, o ano de escolaridade, as ideias e procedimentos em desenvolvimento e as ideias e procedimentos a desenvolver, sugestões para apresentação da tarefa e possíveis ganhos para os alunos.

As aulas onde foram desenvolvidas as cadeias de tarefas foram video-gravadas por um dos membros da equipa do projecto. Os vídeos foram observados pela sub-equipa responsável por essa cadeia e transcritos nos seus aspectos mais significativos.

Para cada cadeia a análise foi feita tarefa a tarefa, sendo, para cada uma, analisados os seguintes aspectos: (1) Apresentação da tarefa aos alunos; (2) Exploração/discussão da tarefa; (3) Discussão final da tarefa (sempre que houve um período de discussão final e esta não foi “entremeada” com a exploração) e (4) Síntese de cada tarefa centrada nos processos usados pelos alunos, de acordo com as categorias de análise.

Fez-se de seguida uma discussão final da cadeia centrada nos processos usados pelos alunos e comparando-os com os resultados da teoria analisada sobre o assunto.

Depois da análise de cada cadeia de tarefas a *trajectória hipotética de aprendizagem*, isto é, os objectivos de aprendizagem para cada aluno, foram confrontados com o processo seguido por cada um tentando estabelecer a trajectória de aprendizagem efectivamente seguida por aqueles alunos. Na análise das tarefas procurou-se ainda compreender quais as características das tarefas que favoreciam o desenvolvimento do

sentido do número, tendo em conta aspectos como: (i) o contexto relativamente ao seu significado e relação com as experiências dos alunos e a sua importância na estruturação dos números; (ii) as ideias e procedimentos a desenvolver, nomeadamente a sua adequação considerando o nível etário dos alunos e a sua adequação às estratégias e procedimentos de cálculo propostos previamente.

### **Os estudos: dois estudos de caso que incidiram na multiplicação**

Com o objectivo de compreender o modo como as crianças desenvolvem o sentido do número a equipa do projecto realizou 9 estudos de caso. Neste texto iremos focar alguns dados incluídos nos dois estudos realizados em turmas de 2º ano e que incidiram sobre a introdução da multiplicação.

Cada caso incidiu na aplicação numa turma de uma *cadeia de tarefas* ou seja, de uma sequência de 3 ou 4 tarefas que procura desenvolver um conjunto de aspectos articulados entre si e que estão directamente relacionados com o modo como foi pensada uma trajectória de aprendizagem para alguns dos temas e relações incluídos no sentido do número, neste caso específico, a multiplicação. Os contextos escolhidos nas duas cadeias descrevem situações próximas dos alunos e pretendem revelar aspectos fundamentais das estruturas multiplicativas associadas, para além de poderem sugerir a identificação de propriedades da multiplicação a partir dos problemas propostos.

No caso que apresentaremos em primeiro lugar procurou-se que fosse evidente a disposição rectangular de objectos (organização por linhas e colunas) que aparece, por exemplo, nas caixas de fruta ou de vegetais. Com a exploração a partir da contagem estruturada de objectos pretendia-se iniciar a compreensão de relações matemáticas importantes como a propriedade comutativa, a propriedade associativa e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subacção para, mais tarde, ampliar o conhecimento das tabuadas. Estas organizações visuais possibilitam ainda uma abordagem inicial aos conceitos de dobro e de metade.

No segundo caso, os contextos nem sempre estavam associados a disposições rectangulares. No entanto, descrevem igualmente situações próximas dos alunos e pretendem revelar aspectos fundamentais das estruturas multiplicativas associadas, para além de poderem sugerir a identificação de propriedades da multiplicação a partir dos problemas propostos.

#### *O caso que inclui a exploração da tarefa Caixas de frutas*

A primeira tarefa incluída neste caso baseou-se na exploração de imagens de caixas de frutas. A professora apresentava, em cartolinas que fixava no quadro, cada uma das imagens da figura 2 (repetindo cada caixa) e pedia aos alunos para indicarem o número de peças de fruta.

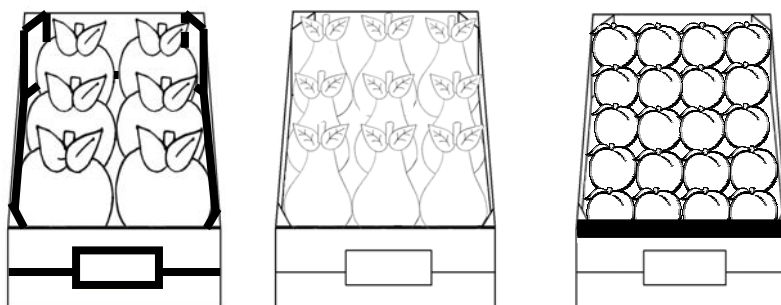


Figura 2- Caixas de Fruta

Depois de olharem para a primeira imagem, rapidamente os alunos responderam que contavam 6 maçãs e justificaram: São 6 porque são  $3+3$ "; "Porque são  $2+2+2$ ". Com o objectivo de levar os alunos a reconhecer a multiplicação a partir da adição de parcelas iguais, a professora pergunta se podem representar  $3+3$  de uma outra forma:

João: Eu fiz duas vezes o três.

(no quadro apontou as 2 colunas com 3 maçãs cada uma no cartaz afixado no quadro e escreveu  $2 \times 3$ ).

Carolina: Então o que eu fiz também pode ser  $3 \times 2$ .

(no quadro aponta na horizontal dizendo que eram 3 filas com 2 maçãs cada uma).

Quando a professora coloca outra caixa (igual à primeira) ao lado desta e pergunta aos alunos quantos frutos estão nas duas caixas, a maioria dos alunos duplica: "Professora são 12 porque são  $6+6$ "; "Tens aí 2 vezes o 6...são 12".

Na análise do número de pêssegos:

Nuno: Dá 20, contei  $4+4+4+4+4$  que é 5 vezes o 4.

Carolina: Eu fiz  $5+5+5+5$  que é 4 vezes o 5 e dá o mesmo.

Quando estão duas caixas iguais:

João: É duas vezes o 20, por isso 40 é o dobro de 20.

A análise das imagens com as caixas de fruta foram reforçando a transição entre o nível de cálculo por contagem – foram diminuindo o número de alunos que subtilmente esticavam o dedo para contar de 1 em 1 – e o cálculo por estruturação. Também facilitou a transição do uso de uma linguagem aditiva "são  $2+2+2$ " ou "são  $3+3$ " para o uso de uma linguagem associada à multiplicação "eram 3 filas com duas maçãs cada uma" ou "eu fiz duas vezes o 3". Também foram evidenciando a compreensão da propriedade comutativa e do conceito de dobro.

#### *O caso que inclui a exploração da tarefa A parede do sótão*

Esta tarefa, incluída numa cadeia de três, tinha como objectivo favorecer a transformação de procedimentos informais da multiplicação em procedimentos de multiplicação estruturada e o uso das relações dobro/metade, pretendia ainda que os alunos pudessem usar os múltiplos dos dobros, as decomposições do 50 e do 100 e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Utilizava números maiores que a primeira tarefa da cadeia com o objectivo dos alunos irem evoluindo e usando procedimentos e relações numéricas associados à operação multiplicação.

Iremos apenas analisar alguns dos processos usados pelos alunos na terceira parte da tarefa que foi enunciada da seguinte forma:

"O pai da Sara experimentou arrumar as estantes lado a lado e colocou 9 estantes de 21 centímetros. Que comprimento da parede ocupou?"

Alguns alunos usaram os conhecimentos que tinham sobre a multiplicação decompondo os factores de modo a obter produtos com que sabiam trabalhar:

Calcular $9 \times 21$ decompondo 9 (5+4)	Calcular $9 \times 21$ decompondo 20 (20+1)	Calcular $9 \times 21$ decompondo 21 (20+1) e 9 (5+4)
$5 \times 21 = 105$ $4 \times 21 = 84$  $105 + 84 = 189$	$9 \times 20 = 180$ $9 \times 1 = 9$ $180 + 9 = 189$	$20 \times 5 = 100$ $20 \times 4 = 80$ $9 \times 1 = 9$ $100 + 80 + 9 = 189$

Alguns alunos parecem conseguir organizar decomposições e aplicar a propriedade distributiva da multiplicação manipulando apenas os números. Outros, como o João Pedro, recorrem a esquemas/desenhos para suportar ou ilustrar o modo como pensaram.

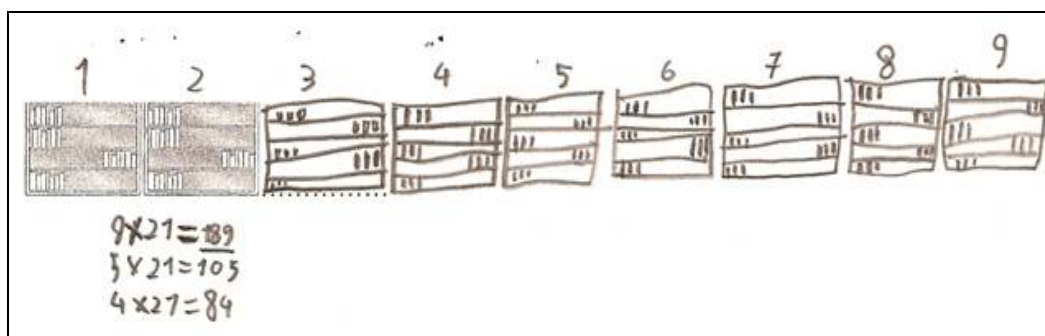


Figura 3 – Resolução do João Pedro

A partilha destes e de outros processos de resolução que os alunos usaram foi cuidadosamente organizada pela professora de modo a que as estratégias fossem apresentadas da mais informal e morosa até à mais poderosa e, no final, salientou que nenhum aluno se lembrou de relacionar esta questão com o problema anterior, em que havia 8 estantes, bastando juntar 21 ao 168.

### As aprendizagens realizadas com o projecto e perspectivas futuras

Numa altura em que encerramos este projecto e preparamos um outro que incidirá igualmente sobre a temática do sentido do número, importa analisar o percurso feito e identificar aspectos essenciais para o trabalho que pensamos prosseguir. A pequena análise de dados que vimos no ponto anterior contextualiza a compreensão de três aspectos centrais. Um primeiro diz respeito à organização da aprendizagem a partir da análise das produções dos alunos. É importante analisar as construções das crianças e perceber qual a ligação entre o conceito ou o princípio matemático utilizado, os procedimentos de cálculo e a representação simbólica usada. As soluções dos alunos para calcular  $9 \times 21$  que parcialmente apresentamos anteriormente, permitem perceber como os alunos pensam, quais os conhecimentos que usam e a que suportes/modelos recorrem. Organizar as soluções dos alunos da mais informal à mais formal permite perceber a tendência de desenvolvimento e identificar o que os alunos devem mudar e conservar no seu próprio sistema matemático para conseguir transformar a sua maneira de pensar numa outra, no nível superior de formalização mais próximo (Kraemer, 2008).

Um outro aspecto tem a ver com as tarefas e foi ilustrado no exemplo das caixas de fruta. É determinante analisar como as condições da tarefa podem estimular os alunos a

transformar as suas noções, procedimentos e representações num nível mais alto de compreensão. Alguns contextos são bem conhecidos – pares de objectos (meias, sapatos, ...) para estimular contar de 2 em 2 em vez de 1 em 1; disposições rectangulares para estimular a passagem da adição sucessiva de parcelas iguais para a multiplicação; notas de 5, 10, 20, 50 euros para estimular a contagem assente em grupos de 5, 10, 20, 50. Outros contextos terão de ser pensados a partir da observação de contextos da vida real e da análise das suas possibilidades para apoiar a matematização.

O terceiro aspecto prende-se com o professor e a sua importância para apoiar nos alunos o desenvolvimento do sentido do número. Nos exemplos apresentados este aspecto é pouco visível. No entanto, referem-se algumas preocupações da professora na organização da partilha das resoluções dos alunos. Também, no primeiro caso, se percebe como a professora pensou a trajectória hipotética de aprendizagem. Para além destes aspectos destacam-se muito outros como o modo como o professor gere os debates ou como promove a argumentação.

Dolk (2008) considera que “a recriação do pensamento dos alunos ajuda professores e investigadores a expandir e a refinar a sua compreensão do conhecimento dos alunos de forma a construir uma melhor trajectória de aprendizagem hipotética (Simon, 1995), a construir um melhor conhecimento acerca do potencial de um contexto e a assentar e afinar as suas teorias didácticas e educacionais”. Nós, com o trabalho realizado no âmbito do projecto DSN, vemos como muito importantes este trabalho baseado na recriação do pensamento dos alunos, a que Dolk chama de arqueologia educacional. Ele é um caminho a aprofundar na tentativa de perseguir uma melhor compreensão sobre o modo como se desenvolve o sentido do número.

### **Referências Bibliográficas**

- Abrantes, P.; Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.
- Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., Rocha, I. e Serrazina, L. (2006). Números e Álgebra: Desenvolvimento Curricular. Em I. Vale et al (Org.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 65-92). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação: Secção de Educação Matemática
- Fosnot, C. e Dolk, M. (2001). *Constructing Number Sense, Addition and Subtraction*. Portsmouth: Heinemann.
- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics as to be Useful? *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3-8.
- Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult and what can we do about it? Em L. Santos et al (Org.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83- 101). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics
- Simon. M.A. (1995). Reconstructing mathematics from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.



- Kraemer, J-M. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds). *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Lisboa: Escolar Editora (publicação em 2008).
- Dolk, M. (2008). Problemas Realistas: um ponto de partida para uma Sequência de Oportunidades de Aprendizagem. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds). *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Lisboa: Escolar Editora (publicação em 2008).